

УДК 664.7
ББК 36.821
М-54

Подгорный Сергей Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2;

Косачев Вячеслав Степанович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологического оборудования и систем жизнеобеспечения ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861)275-22-79;

Кошевой Евгений Пантелеевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологического оборудования и систем жизнеобеспечения ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861) 275-22-79;

Схаляхов Анзаур Адамович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета ФГБОУ ВПО «Майкопский государственный технологический университет», 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 191, тел.: 8(8772)57-04-12.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЗЕРНА ЭЛЛИПСОВИДНОЙ ФОРМЫ (рецензирована)

В работе проведено моделирование процесса использования потенциала переноса процесса потенциалопроводности при сушке зерна с учетом особенностей их геометрии с целью определения оптимальных режимов.

Ключевые слова: потенциалопроводность, моделирование, эллипсоидная форма, изопотенциальные поверхности, метод сеток

Podgorny Sergey Alexandrovich, Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Production Process Automation of FSBEI HPE «Kuban State Technological Technology», 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str.;

Kosachev Vyacheslav Stepanovich, Doctor of Technical Sciences, professor, professor of the Department of Technological Equipment and Life Support Systems of FSBEI HPE «Kuban State Technological University», 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 275-22-79;

Koshevoy Eugeniï Panteleevich, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Technological Equipment and Life Support Systems of FSBEI HPE «Kuban State Technological University», 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 275-22-79;

Skhalyakhov Anzaur Adamovich, Doctor of Technical Sciences, associate professor, professor of the Department of Technologies, Machinery and Equipment for Food Production, Dean of the Technological Faculty of FSBEI HPE «Maikop State Technological University», 385000, Republic of Adyghea, Maikop, 191 Pervomayskaya Str., 191, tel.: 8 (8772) 57-04-12.

METHODS FOR SOLVING THE PROBLEM OF POTENTIAL CONDUCTIVITY FOR ELLIPSOID GRAIN (reviewed)

The process of the use of the transfer potential of the potential conductivity process when drying grain taking into account the characteristics of their geometry in order to determine the optimum conditions has been simulated.

Keywords: potential conductivity, modeling, elliptical shape, isopotential surface, grid method.

Моделирование процесса теплопроводности при сушке зерна необходимо для определения механизма и рациональных режимов сушки. Особенностью зерна как объекта сушки является эллипсоидная форма и необходима разработка методов решения учитывающих эту особенность. В работе [1] рассмотрен метод сеток, который позволяет решить эту задачу. В данной работе проводится сравнительная оценка различных методов.

Полученные значения методом сеток сравнивались с аналитическим решением, предложенным Лыковым А.В. [2] для сферической частицы, которое может быть представлено программным методом:

$$\Theta_{\text{Sph}}(\tau) := \begin{cases} \text{if } Fo(\tau) < 0.0035 \\ \left| \begin{array}{l} 1 + 3 \cdot Fo(\tau) - 6 \cdot \sqrt{Fo(\tau)} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{20} \left(\text{ierfc} \left(\frac{n}{\sqrt{Fo(\tau)}} \right) \right) \right] \\ 1 \text{ otherwise} \end{array} \right. & \text{if } \tau \neq 0 \\ \sum_{n=1}^{20} \left[\frac{6}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \exp \left[- \left(n^2 \cdot \pi^2 \cdot Fo(\tau) \right) \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

где $\Theta_{\text{Sph}}(\tau)$ – среднее значение потенциала в шаре для момента времени τ ;

$$\text{ierfc}(x) := \int_x^{\infty} \text{erfc}(\xi) d\xi$$

$Fo(\tau) = a_{\Theta} \cdot \tau / R_{\text{эф}}^2$ – критерий гомохронности Фурье; – интегральная функция ошибок.

Используя (1) и результаты расчетов методом сеток [1] были проведены сравнительные расчеты изменения поля во времени для шара. Сравнение результатов расчетов представлено на рисунке 1.

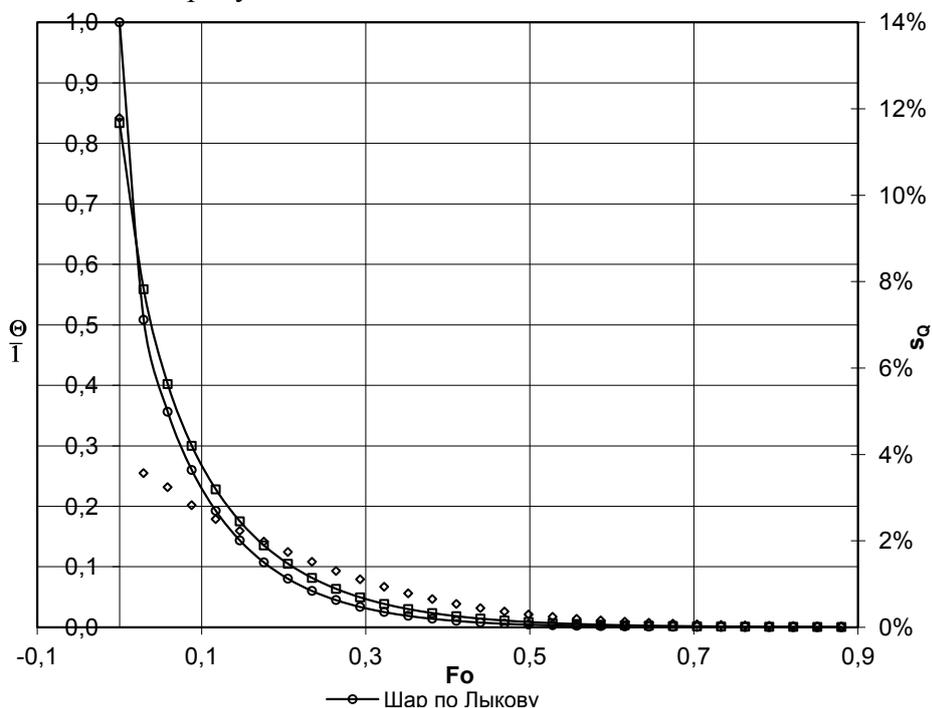


Рисунок 1. Сравнение результатов расчета по сетке (MaxNum = 6, MaxTime = 30, Rph = 1,8467 мм, $a_{\Theta} = 2 \text{ мм}^2/\text{с}$, $\Delta\tau = 0.05 \text{ с}$, $\Delta h = 0,30778 \text{ мм}$) с аналитическим решением Лыкова

Из представленных данных на рисунке 1 видно, что при даже небольшом числе узлов сетки возможно получить достаточно точные решения в широком диапазоне критерия гомохронности Фурье.

Важным параметром при расчете является обобщенный радиус ($R_{эф}$), используемый при расчете критерия Фурье, который для шарообразной частицы может быть определен по формуле:

$$\frac{V_{шара}}{S_{шара}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_{эф}^3}{4 \cdot \pi \cdot R_{эф}^2} = \frac{R_{эф}}{3} \Rightarrow R_{эф} = 3 \cdot \frac{V_{шара}}{S_{шара}} \quad (2)$$

В связи с тем, что коэффициент формы в этом случае равен единице. При деформации осей сфера преобразуется в трехосный эллипсоид, определяющий размер которой можно оценить по параметрам относительной деформации этих осей.

В таком случае удобно использовать соотношения объемов и поверхностей коаксиальных эллипсоидов. Формула расчета объема эллипсоида:

$$V_{эл}(a, b, c) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \quad (3)$$

Формулу площади поверхности эллипсоида нельзя выразить при помощи простейших функций, хотя выражение известно:

$$S_{эл}(a, b, c) = 2 \cdot \pi \cdot \left\{ c^2 + \frac{b \cdot c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot LegendreF[\theta(a, c), m(a, b, c)] + \right. \\ \left. + b \cdot \sqrt{a^2 - c^2} \cdot LegendreE[\theta(a, c), m(a, b, c)] \right\} \quad (4)$$

где LegendreF(x, k), LegendreE(x, k) – эллиптические интегралы Лежандра:

$$LegendreF(x, k) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)}} dt \quad LegendreE(x, k) := \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)} dt \quad (5)$$

параметры m и θ определяются следующими соотношениями:

$$m(a, b, c) = \frac{a^2 \cdot b^2 - c^2}{b^2 \cdot a^2 - c^2} \quad \theta(a, c) = ArcSin \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right) \quad (6)$$

Полученные результаты показывают, что в частицах равного объема чем ближе форма частицы к сферической, тем скорость переноса потенциала медленнее.

Для проведения сравнительного анализа представленного сеточного метода решения был использован метод Галеркина [3], который заключается в поиске пробных функций, удовлетворяющих исходному дифференциальному уравнению и для одномерных задач, позволяет получать полуаналитические решения.

В качестве пробных функций использованы полиномы следующего вида:

$$\begin{aligned}
P_0(\xi) &:= 1 \\
P_2(\xi) &:= \frac{3 \cdot \xi^2 - 1}{2} \\
P_4(\xi) &:= \frac{35 \cdot \xi^4 - 30 \cdot \xi^2 + 3}{8} \\
P_6(\xi) &:= \frac{231 \cdot \xi^6 - 315 \cdot \xi^4 + 105 \cdot \xi^2 - 5}{16}
\end{aligned} \tag{7}$$

Из этих полиномов образованы пробные функции, которые удовлетворяют граничным условиям задачи, составляем из них ряд, являющийся пробной функцией решения данной краевой задачи:

$$D_0(X) := A_0 \cdot (P_0(X) - P_2(X)) + A_1 \cdot (P_0(X) - P_4(X)) + A_2 \cdot (P_0(X) - P_6(X)) \tag{8}$$

где параметры A_j – функции во времени, а $P_i(x)$ – пробные координатные функции.

Решая матричное уравнение:

$$A := M^{-1} \cdot B \tag{9}$$

где

$$M := \begin{bmatrix} \int_0^1 (P_0(X) - P_2(X)) \cdot (P_0(X) - P_2(X)) \, dX & \int_0^1 (P_0(X) - P_4(X)) \cdot (P_0(X) - P_2(X)) \, dX & \int_0^1 (P_0(X) - P_6(X)) \cdot (P_0(X) - P_2(X)) \, dX \\ \int_0^1 (P_0(X) - P_2(X)) \cdot (P_0(X) - P_4(X)) \, dX & \int_0^1 (P_0(X) - P_4(X)) \cdot (P_0(X) - P_4(X)) \, dX & \int_0^1 (P_0(X) - P_6(X)) \cdot (P_0(X) - P_4(X)) \, dX \\ \int_0^1 (P_0(X) - P_2(X)) \cdot (P_0(X) - P_6(X)) \, dX & \int_0^1 (P_0(X) - P_4(X)) \cdot (P_0(X) - P_6(X)) \, dX & \int_0^1 (P_0(X) - P_6(X)) \cdot (P_0(X) - P_6(X)) \, dX \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \int_0^1 C_0 \cdot (P_0(X) - P_2(X)) \, dX \\ \int_0^1 C_0 \cdot (P_0(X) - P_4(X)) \, dX \\ \int_0^1 C_0 \cdot (P_0(X) - P_6(X)) \, dX \end{bmatrix}$$

а C_0 – приравнивается к единице, исходя из значения безразмерного избыточного потенциала в начальный момент времени.

В результате были получены значения параметров A_i , которые соответствуют начальному моменту времени.

На рисунке 2 представлен вид пробной функции, описывающий начальное распределение избыточного потенциала от безразмерной координаты ξ .

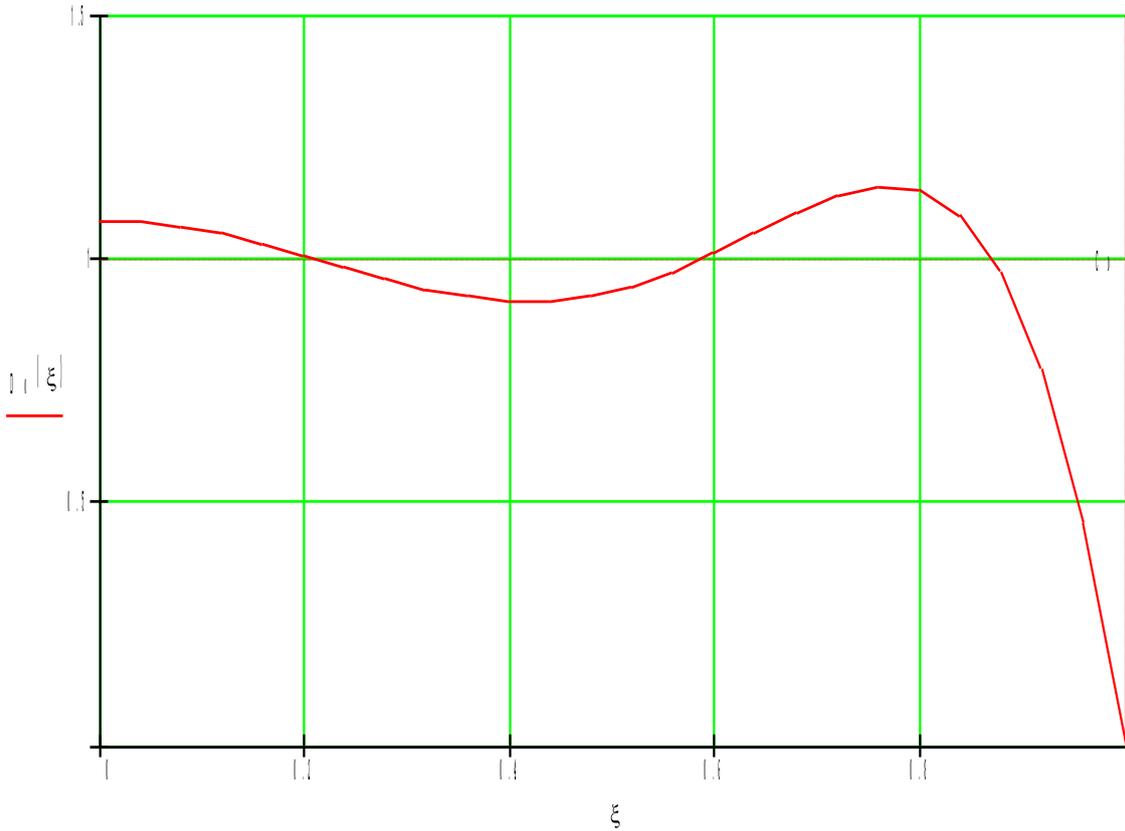


Рисунок 2. Пробная функция, описывающая начальное распределение потенциала

Подставляя ряд из пробных функций в исходное дифференциальное уравнение, и производя интегрирование полученных уравнений в интервале от 0 до 1 (область эллипсоида в безразмерной координате) получаем матрицы, представляющие собой коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений, используемые для расчетов параметра A_i во времени.

$$C := \begin{bmatrix} \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_2(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_2(X)) \right] (P_0(X) - P_2(X)) dX & \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_4(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_4(X)) \right] (P_0(X) - P_2(X)) dX & \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_6(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_6(X)) \right] (P_0(X) - P_2(X)) dX \\ \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_2(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_2(X)) \right] (P_0(X) - P_4(X)) dX & \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_4(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_4(X)) \right] (P_0(X) - P_4(X)) dX & \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_6(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_6(X)) \right] (P_0(X) - P_4(X)) dX \\ \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_2(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_2(X)) \right] (P_0(X) - P_6(X)) dX & \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_4(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_4(X)) \right] (P_0(X) - P_6(X)) dX & \int_0^1 \left[\frac{\frac{d}{dX} \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_6(X))}{L dX dX} S(X) \dots + \frac{d}{dX} S(X) \frac{d}{dX} (P_0(X) - P_6(X)) \right] (P_0(X) - P_6(X)) dX \end{bmatrix}$$

Решение системы дифференциальных уравнений проводили методом Рунге Кутта с изменяемым шагом по времени, используя в качестве условия Коши вектор начальных параметров A_i , а в качестве матрицы правых частей

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} \text{MIC}_{0,0} \cdot x_0 + \text{MIC}_{0,1} \cdot x_1 + \text{MIC}_{0,2} \cdot x_2 \\ \text{MIC}_{1,0} \cdot x_0 + \text{MIC}_{1,1} \cdot x_1 + \text{MIC}_{1,2} \cdot x_2 \\ \text{MIC}_{2,0} \cdot x_0 + \text{MIC}_{2,1} \cdot x_1 + \text{MIC}_{2,2} \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

где $\text{MIC} := E \cdot \Psi \cdot M^{-1} \cdot C$

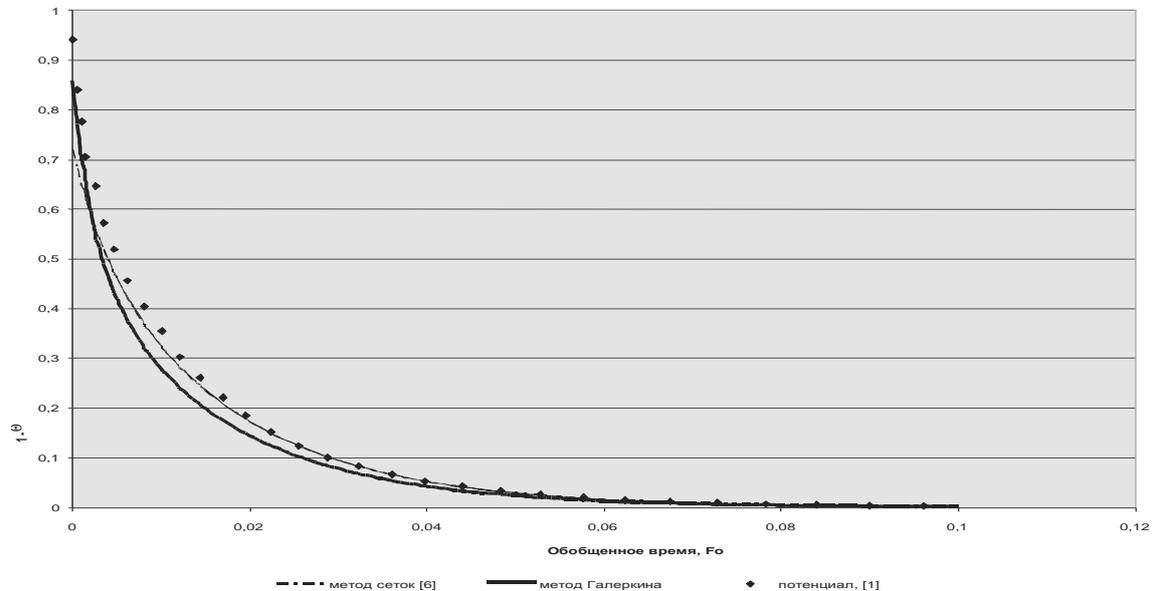
Система решена с помощью стандартной функции Rkadapt в среде MathCAD, что дало возможность получить коэффициенты ряда

$$Z := \text{Rkadapt}(x, 0, 0.1, 200, D)$$

Далее находится среднее значение потенциала по формуле:

$$T_n := \frac{\int_0^1 \left[\left[z_{n,1} \cdot (P_0(x) - P_2(x)) + z_{n,2} \cdot (P_0(x) - P_4(x)) + z_{n,3} \cdot (P_0(x) - P_6(x)) \right] \cdot v(x) \right] dx}{\int_0^1 v(x) dx}$$

Используя расчеты моделирования диффузии в эллипсоиде [4] и полученное среднее значение потенциала, как методом сеток, так и методом Галеркина, построили график, сравнивающий изменение избыточного потенциала эллипсоидального тела во времени (рисунок 3).



Рисунок

3. Зависимость среднего избыточного потенциала от времени, полученная разными методами

Как видно из рисунка метод сеток наиболее близко приближен к аналитическому решению потенциалопродности в эллипсоидальном теле. Так же заметно, что решение методом Галеркина имеет наибольшее отклонение, но, не смотря полученные несовпадения, отклонения считаются допустимыми.

Проведен анализ потенциалопереноса при сушке зерен риса с учетом особенностей их геометрии. Форма зерен различных сортов эллипсоидная с максимальным габаритом между 5 и 9 мм по длине.

В процессе сушки зерен наиболее важными параметрами являются, объем семени (V) и площадь его поверхности (S) [4]. Для их определения использовали модель эллипсоида, оси которого соответствуют габаритам семени. Как установлено ошибка аппроксимации составляет от 3,6 до 4,3 % от экспериментальных величин.

Выводы

Использование изопотенциальных поверхностей для снижения размерности задачи основано на введении размерной координаты нормированной от 0 до 1, покрывающей весь объем эллипсоида.

Установлено, что метод сеток наиболее близко приближен к аналитическому решению теплопроводности в эллипсоидальном теле. При этом решение методом Галеркина имеет несколько большее отклонение, которые можно считать допустимыми.

Разработанная методология моделирования позволит определять развития градиентов потенциала в процессе сушки, что необходимо для прогнозирования развития трещиноватости зерна при сушке.

Литература:

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
2. Постановка задачи теплопроводности для зерна эллипсоидальной формы и обоснование решения численными методами / С.А. Подгорный [и др.] // Новые технологии. 2015. Вып. 2. С. 20-28.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина / пер. с англ. М.: Мир, 1988. 352 с.
4. Li Z., Ye J., Kobayashi N. Modeling of Diffusion in Ellipsoidal Solids: a Simplified Approach to Solving Some Drying Problems // 16th International Congress of Chemical and Process Engineering (22-26 August 2004). Prague: Czech Republic, 2004.

References:

1. Lykov A.V. *The theory of heat conduction* / A.V. Lykov. M.: Higher School, 1967. 600 p.
2. *Statement of the problem of potential conductivity for ellipsoid grain and reasons for the solving by numerical methods* / S.A.Podgorny [and oth.]// *New Technologies*. 2015. Iss. 2. P. 20-28.
3. *Fletcher K. Numerical methods based on the Galerkin method/ Tr. From English*. M.: Mir, 1988. 352 p.
4. Li Z., Ye J., Kobayashi N. *Modeling of Diffusion in Ellipsoidal Solids: a Simplified Approach to Solving Some Drying Problems* // 16th International Congress of Chemical and Process Engineering (22-26 August 2004). Prague: Czech Republic, 2004.