УДК 658.5:519.17
ББК 65.23+22.176
П-12

Павлов Дмитрий Алексеевич, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и обработки информации, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина»; e-mail: dp.logic@gmail.com;*

Яхонтова Ирина Михайловна, *кандидат экономических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина»; e-mail: i.yahontova@yandex.ru*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ НА ПРЕДПРИЯТИИ*

(рецензирована)

Исследуется математическая модель задача сетевого распределения производственных задач на предприятии. В качестве модели иерархической структуры подразделений организации, применяется определенный класс масштабно-инвариантных графов, называемых предфрактальными графами. В результате задача распределения производственных задач сводится к задаче о покрытии предфрактального графа простыми непересекающимися цепями в многокритериальной постановке.

Ключевые слова: *сетевое распределение производственных задач, распределение ресурсов, предфрактальный граф, распределенные вычисления, многокритериальная оптимизация.*

Pavlov Dmitry Alexeevich, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, an associate professor of the Department of System Analysis and Information Processing, FSBEI HE “Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin”; e-mail: dp.logic@gmail.com;*

Yakhontova Irina Mikhailovna, *Candidate of Economics, an associate professor, FSBEI HE “Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin”; e-mail: i.yahontova@yandex.ru.*

MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEM OF NETWORK PLANNING OF INDUSTRIAL TASKS AT AN ENTERPRISE

(reviewed)

A mathematical model of the problem of network distribution of production problems at an enterprise has been studied. A specific class of scale-invariant graphs, called pre-fractal graphs is used as a model of an hierarchical structure of an organization divisions. As a result, the task of distributing production problems is reduced to the problem of covering a prefractal graph with simple non-intersecting chains in a multi-criteria formulation.

Keywords: *network distribution of production tasks, resource allocation, prefractal graph, distributed computing, multicriteria optimization.*

Проблема сетевого распределения производственных задач (ресурсов) на предприятии является одной из важных проблем сложных социально-экономических систем [1].

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 18-010-00891 А.

Неэффективное распределение задач несет за собой существенные экономические издержки. Возникшие в этом контексте задачи как правило являются достаточно сложными и требуют основательных междисциплинарных исследований.

Рассматриваемая в работе задача рационального распределения ресурсов на предприятии имеет ряд интерпретаций: формирование групп исполнителей при выполнении производственных заданий [1]; организация распределенных вычислений в корпоративной сети [2].

Для решения исследуемой задачи в приведенных интерпретациях в работе строится одна математическая модель.

Ниже рассмотрим задачу распределения ресурсов предприятия на примере организации распределенных вычислений в корпоративной сети.

Сегодняшние реалии таковы, что многие крупные предприятия используют распределенные вычислительные системы [2, 3]. В таких системах процесс принятия решения основан на поэтапном сборе и анализе информации. В этих системах распределенная обработка информации строится на основе имеющейся корпоративной сети. В качестве элементов этой сети выступают вычислительные устройства взаимосвязанные между собой коммуникационными линиями связи.

В качестве примера организаций, применяющих распределенную вычислительную систему в своей деятельности, являются крупные предприятия, с иерархической децентрализованной структурой обработки информации.

В топологическом смысле компьютерную сеть предприятий с распределенной вычислительной системой можно представить в виде структуры последовательно включающей в себя подразделения организации. Уровень структуры – это количество вложенных подразделений организации. Примерами последовательного включения подразделений являются крупные организации, состоящие из секций, отделов, ведомств, подразделений. В функции каждого уровня структуры входит сбор и обработка информации, передаваемой с нижних уровней. Обработки, анализа информации и принятие определенного решения проходит по определенной схеме. Секции группируются в отделы, которые в свою очередь объединяются в ведомства, последние соединяются в подразделения. Процесс включения повторяется до тех пор, пока сеть не объединит всю структуру организации воедино и на последнем этапе примет определенное решение.

Следует отметить, что каждое вычислительное устройство корпоративной сети выполняет определенный набор операций и должно быть задействовано в процессе решения общей задачи всей системы.

Основными требованиями, предъявляемыми к такой системе, являются: производительность; надежность; возможность динамического перераспределения нагрузок между элементами системы; быстрое и качественное принятие решения.

Для моделирования проблемы распределения производственных задач наиболее подходящим является аппарат теории графов [4].

Обычно для исследования структуры связей организации используются графы, позволяющие наглядно представить взаимоотношения между объектами системы. В графовой модели изучаемой системы вершинам соответствуют вычислительные устройства, а ребрам – линии связи между ними.

В качестве модели иерархической структуры, объединяющей большое количество структурных подразделения организации в единую компьютерную сеть, будем использовать специальный класс масштабно-инвариантных графов, называемых предфрактальными графами. Последние, в отличии от классических графов, позволяют естественным образом отразить структуру связей и наилучшим образом подходят для описания структурно-динамических процессов в организации в плане роста сети.

Ниже построим описание этой задачи в теоретико-графовой постановке и учетом многих критериев оптимизации решения этой проблемы, которая сводится к задаче о покрытии предфрактального графа простыми непересекающимися цепями [5].

Для построения теоретико-графовой модели изучаемой задачи ниже приведем ряд базовых определений, отметим заранее, что недостающие понятия и определения можно найти в работах [4, 6].

Основные понятия и определения

Для определения предфрактального графа используется некоторый конечный связный вершинный граф $H = (W, Q)$, с множеством вершин W $|W| = n$ и множеством ребер Q, который называется *затравкой*, а также операции *замещения вершины затравкой* (ЗВЗ), в основе которой лежит операция расщепления вершины графа [4].

Вкратце, процесс порождения предфрактального графа можно представить в виде последовательного выполнения этапов, $(s = 1,2, \dots, l)$, в результате которых к каждой вершине образовавшегося на предыдущем этапе графа применяется операция ЗВЗ.

Проведем поэтапную реализацию процесса построения предфрактального графа. На этапе $s = 1$ в качестве начального графа используется затравка H. Полученный граф $G_1(V_1, E_1)$ совпадает с затравкой H. На этапе $s = 2$ к каждой вершине $v \in V_1$ получившегося на этапе 1 графа G_1 применяется операция ЗВЗ. В результате, построенный граф назовем предфрактальным графом $G_2(V_2, E_2)$. Аналогично, на этапе $s = l$ к каждой вершине $v \in V_l$ получившегося на предыдущем этапе предфрактального графа $G_{l-1}(V_{l-1}, E_{l-1})$ применяется операция ЗВЗ, в результате образованный граф назовем предфрактальным графом $G_l(V_l, E_l)$.

При выполнении бесконечного числа описанных выше этапов $(l \to \infty)$ получаем *фрактальный граф*.

Предфрактальный граф обозначим $G_L = (V_L, E_L)$, V_L – множество вершин, E_L – множество ребер. В предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, где L-ранг, который определяет число этапов порождения графа.

Последовательность графов $G_1, G_2, \dots, G_L$, образованная в результате поэтапного процесса построения предфрактального графа назовем *траекторией.* Фрактальный граф задается траекторией состоящей из бесконечной последовательности графов $G_1, G_2, \dots, G_L \dots$.

Если в предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, каждому ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано некоторое положительное число $w\left(e^{(l)}\right) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, a>0, $\theta < \frac{a}{b}$, то G_L называется *взвешенным или нагруженным*, а само число назовем весом ребра.

Структура большинства систем, встречающихся в реальных прикладных задачах, моделируются предфрактальными графами порожденными не одной затравкой, а в общем случае, выбирается случайно либо регулярно из некоторого множества Н=$\{H_1, H_2, \dots, H_T\}$.

Цепью С предфрактального графа G_L назовем чередующуюся последовательность вершин и ребер, без повторяющихся вершин. *Длиной цепи* назовем количество содержащихся в ней ребер и будем обозначать $len(C)$.

Цепь $C^{(l)}$ предфрактального графа G_L все ребра которой принадлежат рангу l, назовем *ранговой цепью.*

Теоретико-графовая модель задачи распределения ресурсов

Строится взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой $H = (W, Q)$, в котором V_L – множество вершин, каждая вершина которого соответствует вычислительному устройству, а множество ребер $e_{ij} \in E_L$, соединяющих вершины $v_i, v_j \in V_L$, соответствует линиям коммуникационной связи между *i*-м и *j*-м узлами. Каждому ребру e_{ij}, приписаны веса $w(e_{ij})$ – числовые характеристики определяющие степень отказа (сбоев) коммуникационных линий связи между *i*-м и *j*-м узлами. Ребрам $e^{(L)}$, L-го ранга, согласно определения взвешенного предфрактального графа будут соответствовать веса $w(e^{(L)})$ с минимальной степень отказа. В приложении к изучаемой задаче это означает, что работа секций при обработке информации не зависит от работы других подразделений.

Пусть $x = (V_L, E_x)$, $E_x \subseteq E_L$ – покрытие предфракатального графа G_L, состоящее из простых непересекающихся цепей. *Множеством допустимых решений* (МДР) X образует совокупность всех допустимых покрытий $X = X(G_L) = \{x\}$ предфрактального графа G_L.

На множестве x определим ВЦФ, отвечающую за качество покрытия x на графе G_L

$$\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) \tag{1}$$

$$F_1(x) = \sum_{C \in x} \sum_{e \in C} w(e) \to min, \tag{2}$$

где $\sum_{C \in x} \sum_{e \in C} w(e)$ – общий вес входящий в x;

$$F_2(x) = |x| \to min, \tag{3}$$

где $|x|$ – количество цепей входящих в x;

$$F_3(x) = \hbar \to min, \tag{4}$$

где – η число цепей разного типа входящих в x. Цепи являются однотипными если они содержат одинаковое количество ребер их составляющих.

Приведенные критерии (2)-(4) ВЦФ (1), применительно к исследуемой задаче распределения ресурсов, несут определенный содержательный смысл.

Первый критерий (2) отвечает за надежность системы при распределении нагрузки между вычислительными устройствами.

Второй критерий (3) накладывает требование, позволяющее уменьшить общее время обработки задачи в системе.

Третий критерий (4) отвечает за равномерное распределение вычислительного процесса между элементами системы, когда в системе выделяется множество групп равных по мощности (количеству) задействованы в решении задачи элементов. Этот критерий позволит не перегружать отдельные вычислительные устройства, а распределять задачу равномерно среди всех элементов сети.

Заключение

Построенная в работе математическая модель задачи рационального распределения ресурсов на предприятии приведена в интерпретации для организации распределенных вычислений в корпоративной сети, однако с помощью этой модели можно решить более широкий класс задач, связанных с эффективным распределением ресурсов на предприятии.

Литература:

1. Перепелица В.А., Петова Е.Х. Исследование отношений подчиненности в математических моделях формирования целевых групп исполнителей // Фракталы в науке, производстве и обществе: сборник трудов научно-практической конференции, посвященной 275-летию Российской Академии Наук. Черкесск, 1999. С. 47-58.

2. Косяков М.С. Введения в распределенные вычисления. Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2014. 155 с.

3. Тандембаум Э., ван Стеен М. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. Санкт-Петербург: Питер, 2003. 877 с.

4. Лекции по теории графов: учебное пособие / В.А. Емеличев [и др.]. Москва: Наука, 1990. 384 с.

5. Павлов Д.А. Особенности многокритериальной оптимизации на предфрактальных графах: задача покрытия простыми цепями. Краснодар: КубГАУ, 2016. 122 с.

6. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: CYGNUS, 1998. 170 с.

7. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013. 333 с.

Literature:

1. Perepelitsa V.A., Petova E.Kh. Study of subordination relationships in mathematical models of forming target groups of performers // Fractals in science, production and society: a collection of works of the scientific-practical conference dedicated to the 275th anniversary of the Russian Academy of Sciences. Cherkessk, 1999. P. 47-58.

2. Kosyakov M.S. Introduction to distributed calcucations. St. Petersburg: NRU ITMO, 2014. 155 p.

3. Tandembaum E., van Steen M. Distributed systems. Principles and paradigms. St. Petersburg: Peter, 2003. 877 p.

4. Lectures on graph theory: a study guide / V.A. Emelichev [et al.]. Moscow: Science, 1990. 384 p.

5. Pavlov D.A. Features of multi-criteria optimization on prefractal graphs: the problem of covering with simple chains. Krasnodar: KubSAU, 2016. 122 p.

6. Kochkarov A.M. Recognition of fractal graphs. Algorithmic approach. Lower Arkhyz: CYGNUS, 1998. 170 p.

7. Perepelitsa V.A. Multi-criteria models and methods for optimization problems on graphs. LAP LAMBERT Academic Publication, 2013. 333 p.